

NBS

NEDERLANDSE BRUGGEN STICHTING

Postadres: Postbus 59, 2700 AB Zoetermeer

Bezoekadres: Bouwdienst Rijkswaterstaat, Herman Gorterhove 4,
2726 AC Zoetermeer. Tel. (079) 329 23 68. Fax (079) 329 23 01
www.bruggenstichting.nl. e-mail: nbs@bwd.rws.minvenw.nl

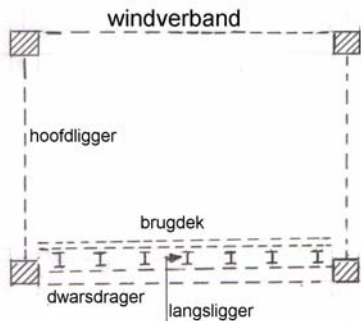
DE EENVOUDIG STATISCH BEPAALDE LIGGER



De eenvoudig statisch bepaalde ligger

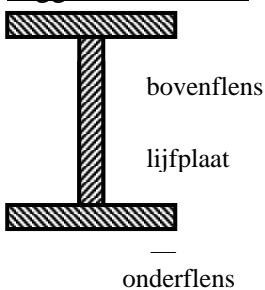
Inleiding : De dragende constructie van een gebouw of een brug is opgebouwd uit een aantal liggers.

Voor een brug is dit :



1. de langsligger die ondersteuning geeft aan het brugdek
2. de dwarsdrager die ondersteuning geeft aan de langsligger(s)
3. de hoofdligger die ondersteuning geeft aan de dwarsdragers
4. de opleggingen die ondersteuning geven aan de hoofdligger(s) en de belasting overbrengen naar de fundering.

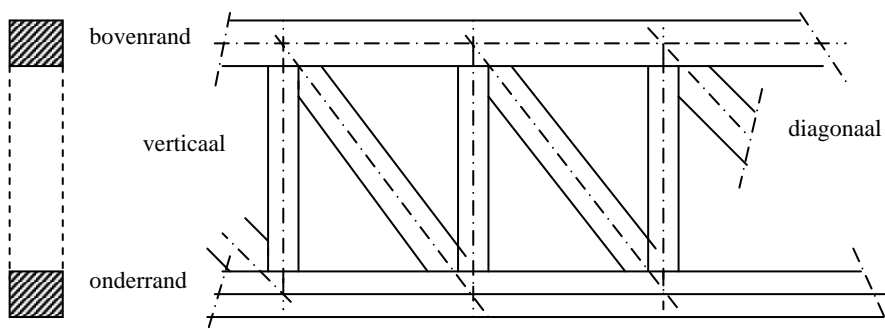
Ligger constructie : Een ligger kan zijn een z.g. volle wand ligger of een vakwerk ligger. De volle wand ligger is opgebouwd uit een bovenflens, lijfplaat en onderflens, figuur links.



De ligger kan recht zijn of gebogen in het vlak van de lijfplaat. In het laatste geval spreken we van een booglijgger.

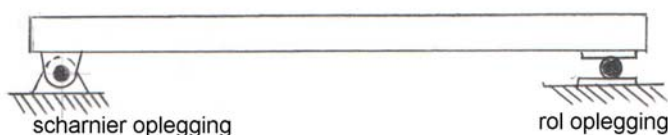
De vakwerklijgger is opgebouwd uit de bovenrand, het verticale verband, veelal opgebouwd uit verticalen en diagonalen, en de onderrand.

Ook voor de vakwerklijgger geldt dat deze recht kan zijn of gebogen in het vlak van het verband. In het laatste geval spreken we van een vakwerk booglijgger.



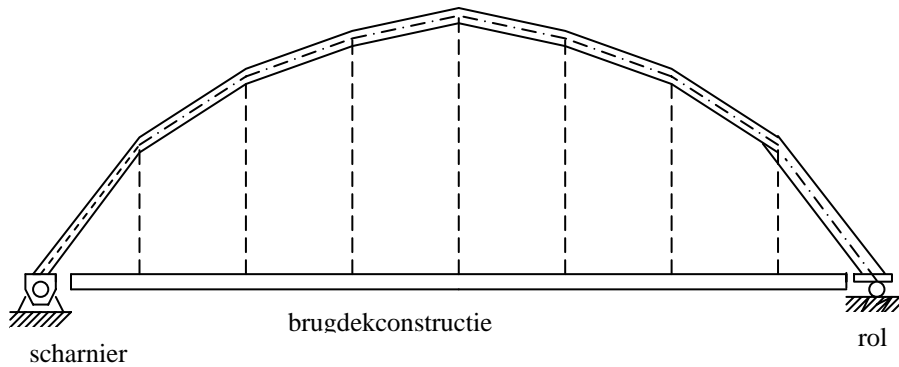
Statisch bepaald of statisch onbepaald.

De statisch bepaalde ligger is veelal een rechte ligger aan een zijde ondersteund door een scharnier oplegging, die zowel een verticale belasting als ook een horizontale belasting kan opnemen, en aan de andere zijde ondersteund door een rol of schuif oplegging die alleen een verticale belasting kan opnemen.



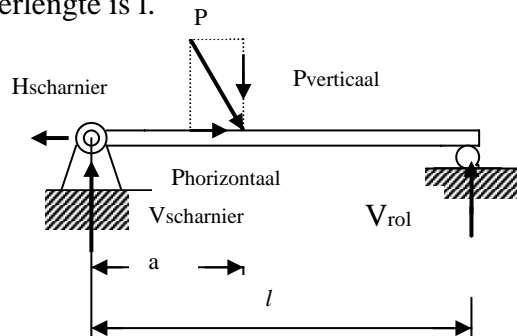
Bij uitzetting of inkrimping van de ligger door temperatuursverandering zal de roloplegging horizontaal bewegen.

Bij de booglijger zal door de verticale belastingen de rol een extra horizontale beweging maken.



De scharnier oplegging geeft twee reactie mogelijkheden nl. een verticale en een horizontale reactie. De roloplegging geeft alleen een verticale reactie mogelijkheid. De ligger is daarmee statisch bepaald opgelegd. De reactiekrachten zijn dan op eenvoudige wijze te bepalen.

Voorbeeld : Een willekeurige kracht P kan ontbonden worden in een verticale kracht P_{vert} en een horizontale kracht P_{ho} . De kracht P belast de ligger op de afstand a vanaf de scharnier oplegging. De liggerlengte is l.



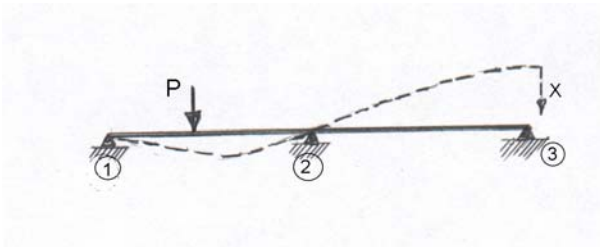
Uit het horizontaal evenwicht van de constructie volgt: $H_{\text{scharnier}} = P_{\text{horizontaal}}$.

Uit het verticaal evenwicht van de constructie volgt : $V_{\text{rol}} = P_{\text{verticaal}} * \frac{a}{l}$

$$V_{\text{scharnier}} = P_{\text{verticaal}} - P_{\text{verticaal}} * \frac{a}{l} = P_{\text{verticaal}} * \frac{l-a}{l} .$$

Bij de statisch onbepaalde constructie is de bepaling van de reactie krachten veel complexer en afhankelijk van de z.g. buigstijfheid van de ligger.

Voorbeeld :



Een ligger op 3 steunpunten. Door de belasting P zal de ligger tussen opleggingen 1 en 2 doorbuigen en wil de ligger bij oplegging 3 zich naar boven verplaatsen. Dit wordt tegengegaan door oplegging 3 die een trekkracht X op de ligger zal uitoefenen. Uit de vervormingen van de ligger door de P en X moet de grootte van X worden bepaald met als voorwaarde, dat de verticale verplaatsing van de ligger bij 3 nul is.

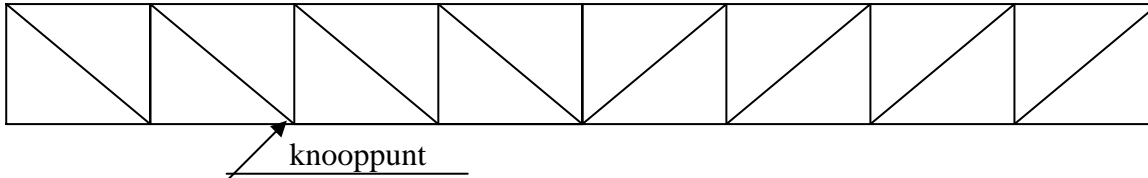
Vakwerkligger

Er zijn verschillende vormen voor een vakwerkligger mogelijk, zie de bijlage.

Een vakwerkligger bestaat uit een aantal staven die de bovenrand, onderrand en verticaal verband vormen.

Veelal bestaat de vakwerkligger uit een aantal driehoeken waarbij de staven ter plaatse van de z.g. knooppunten vormvast aan elkaar verbonden zijn.

Als voorbeeld is genomen een vakwerkligger waarvan de onderrand en de bovenrand evenwijdig aan elkaar lopen en de diagonalen hellend naar het midden van de ligger verlopen.



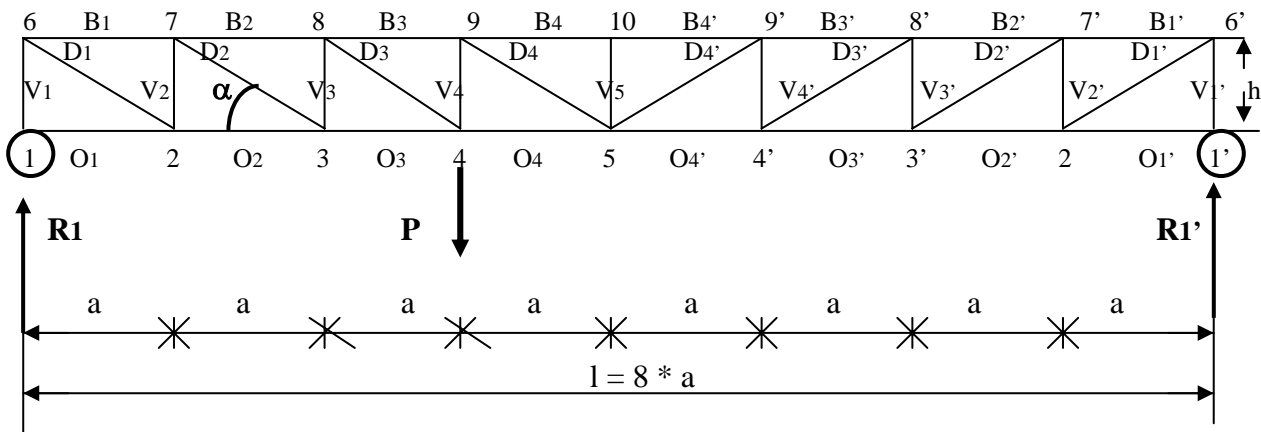
Uitgangspunt van de bepaling van de staafkrachten is dat in elk knooppunt de verticale ontbondenen van de staafkrachten resp. de horizontale ontbondenen van de staafkrachten evenwicht maken..

De aansluitingen van de staven aan de z.g. knoopplaat worden als scharnieren in rekening gebracht. Er treden dan geen momenten op in de aansluiting van de vakwerkstaaf aan de knoopplaat. Doordat in werkelijkheid deze aansluitingen niet scharnierend zijn zullen z.g. secundaire momenten in de knooppunt aansluiting kunnen ontstaan ten gevolge van de doorbuiging van de vakwerkligger.

Deze momenten geven z.g. secundaire spanningen waarvan in de praktijk is gebleken dat deze ten opzichte van de spanningen door het eigen gewicht en de verkeersbelastingen verwaarloosd mogen worden.

Voor de berekening van het vakwerk is de z.g. scharnierende aansluiting een aanzienlijke vereenvoudiging.

Voorbeeld berekening vakwerkligger.



De diagonalen maken een hoek α met de horizontaal, $\sin \alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + a^2}}$

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{h^2 + a^2}}$$

De knooppunten zijn genummerd 1 2 3 ...enz.

De staven van het vakwerk $B_1 B_2$ $V_1 V_2$ $O_1 O_2$ enz.

Bij knooppunt 1 en 1' is de ligger gesteund door een oplegging, b.v. bij 1 de scharnieroplegging en bij 1' een roloplegging.

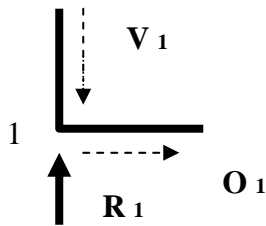
Een belasting die op het brugdek aanwezig is wordt via het dek, de langsliggers en de dwarsdragers naar de knooppunten van de hoofdligger gebracht. In het voorbeeld wordt uitgegaan van een verticale kracht P die bij knooppunt 4 op de hoofdligger wordt uitgeoefend.

Door de kracht P is de reactie van de oplegging bij 1 :

$$R_1 = P * \frac{5a}{l} = \frac{5a}{8a} * P = \frac{5}{8} * P$$

$$R_1' = P - R_1 = \frac{3}{8} * P$$

Uit het evenwicht van knooppunt 1 volgt :



horizontaal evenwicht

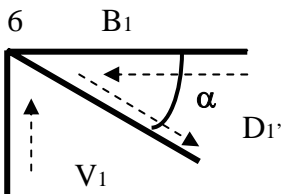
staafkracht in staaf O1 $O_1 = 0$

verticaal evenwicht

staafkracht in staaf V1 $V_1 = R_1$

Deze kracht is een z.g. drukkracht.

Uit het evenwicht van knooppunt 6 volgt :



De kracht in de verticaal V1 is de drukkracht R1.

Uit het verticale evenwicht volgt

$$D_{1vert} = V_1 = R_1$$

Dit is de verticale ontbondene van een trekkracht

$$D_{vert} = D_1 * \sin \alpha ,$$

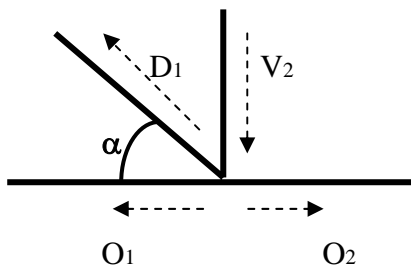
$$\text{Dus de kracht in de diagonaal } D_1 \text{ is : } D_1 = \frac{D_{1vert}}{\sin a} = \frac{R_1}{\sin a}$$

De horizontale component van de diagonaal kracht is : $D_{1hor} = D_1 * \cos \alpha = R_1 * \frac{\cos a}{\sin a}$.

Uit het horizontale evenwicht van knooppunt 6 volgt : $B_1 = D_{1hor} = R_1 * \frac{\cos a}{\sin a} = R_1 \cotg \alpha$.

Dit is een drukkracht.

Uit het evenwicht van knooppunt 2 volgt :



Horizontaal evenwicht : $O_1 + D_{1hor} + O_2 = 0$

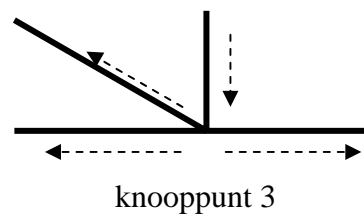
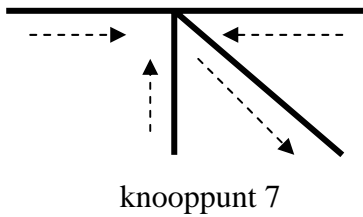
$$O_1 = 0 \quad O_2 = - D_{1hor} = - R \cotg \alpha .$$

D_{1hor} is de horizontale ontbondene van een trekkracht, Daardoor O_2 ook een trekkracht.

Verticaal evenwicht : $V_2 + D_{1vert} = 0$

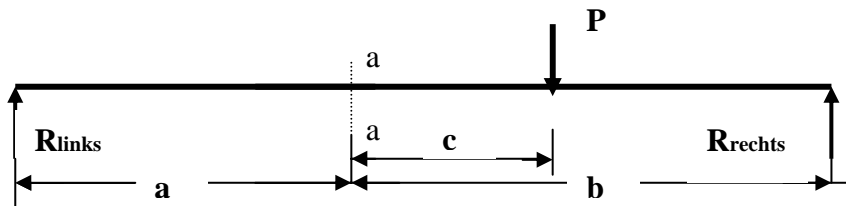
$$V_2 = - D_{1vert} = - R_1 \quad \text{een drukkracht.}$$

Op deze wijze kunnen de krachten in alle vakwerkstaven van de ligger worden bepaald

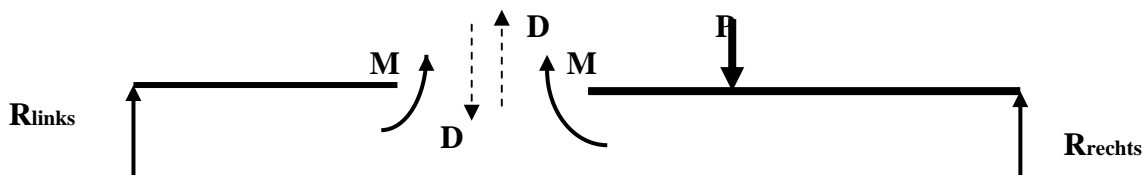


enz.

Buiging en dwarskracht



Door belasting P ontstaan de reactie krachten R_{links} en R_{rechts} .
Stel dat de ligger is doorsneden bij a – a .



Om te voorkomen dat de ligger instort moet op de linkerkant van de snede een moment en een dwarskracht worden uitgeoefend evenals op de rechterkant van de snede.

$$R_{links} = P * \frac{b-c}{a+b} \quad R_{rechts} = P * \frac{a+c}{a+b}$$

Op de doorsnede a – a werkt :	<u>linkerkant</u>	moment	$M = R_{links} * a = P * \frac{b-c}{a+b} * a$
		dwarskracht	$D = R_{links}$
	<u>rechterkant</u>	moment	$M = R_{rechts} * b - P * c$
		dwarskracht	$D = R_{rechts} - P$

Nu is moment $M = R_{rechts} * b - P * c = P * \frac{(a+c)b}{a+b} - P * c$

$$M = \frac{P}{a+b} * (a+c)b - \frac{P}{a+b} * (a+b)c$$

$$M = \frac{P}{a+b} (ab+bc-ac-bc) = \frac{P}{a+b} (ab-ac).$$

$$M = P * \frac{P}{a+b} (b-c) * a.$$

Dit is uiteraard gelijk aan het moment op de linkerzijde.

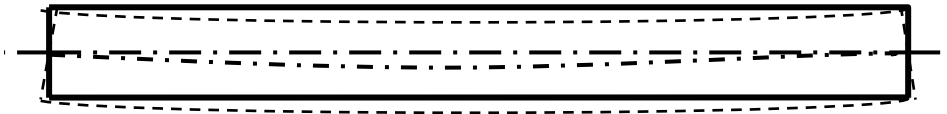
$$\text{Dwarskracht : } D = R_{rechts} - P = P * \frac{a+c}{a+b} - P = P * \frac{c-b}{a+b} = - R_{links}$$

Door het moment ontstaan drukspanningen respectievelijk trekspanningen in de ligger.

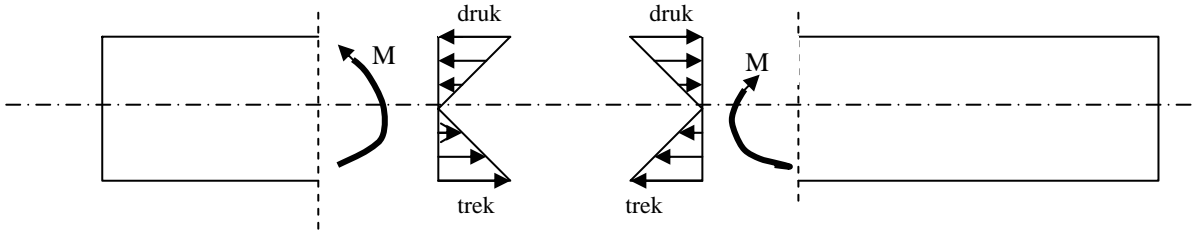
Door de dwarskracht ontstaat een schuifspanning in de ligger.

Volle wand ligger.

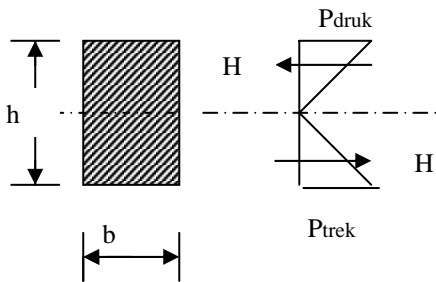
Door de belasting zal de ligger doorbuigen.



Door deze doorbuiging ontstaan buigende momenten in de ligger en daardoor druk- en trekspanningen.



Stel de ligger heeft een rechthoekige doorsnede. Bij een symmetrische ligger zal de buigspanning in het midden van de doorsnede van de ligger nul zijn. De buigspanning is maximaal aan de bovenkant respectievelijk onderkant van de ligger (P_{druk} resp. P_{trek}). De resulterende krachten H van deze spanningen zijn :



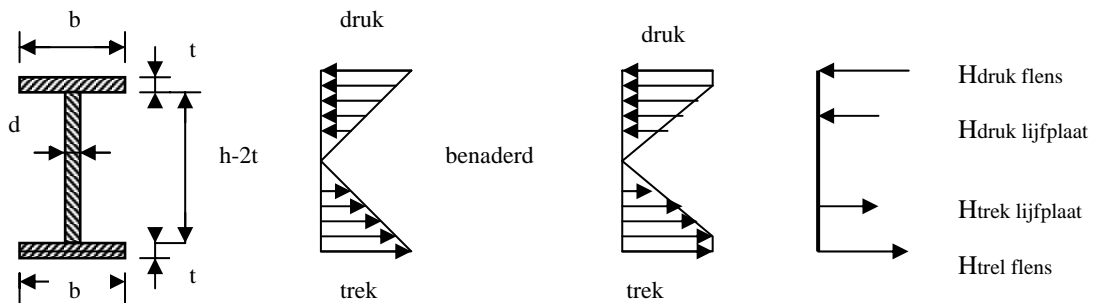
$$H_{druk} = P_{druk} * b * \frac{1}{4} h. \quad (b = \text{breedte van de ligger})$$

$$H_{trek} = P_{trek} * b * \frac{1}{4} h$$

$$\text{Het moment } M = H * \frac{2}{3} h = P * b * \frac{1}{4} h * \frac{2}{3} h = \frac{1}{6} b h^2 * P$$

Bij de symmetrische doorsnede is de absolute waarde van p_{druk} en p_{trek} gelijk aan elkaar.

Het weerstandsmoment W van de ligger is $W = \frac{M}{p} = \frac{1}{6} b$ Plaatligger opgebouwd uit 2 flenzen en lijfplaat (symmetrische ligger).



In de bovenflens : $H_{drukflens} = p_{druk} * b * t$.

In de onderflens : $H_{trekflens} = p_{trek} * b * t$

In de lijfplaat : $H_{druklijfplaat} = p_{druk} * \frac{1}{4} (h - 2t) * d$

$H_{treklijfplaat} = p_{trek} * \frac{1}{4} (h - 2t) * d$

Symmetrische ligger : $p_{druk} = - p_{trek} = p$.

Het moment in de doorsnede

$$M = p * b * t * (h - t) + p * \frac{1}{4} (h - 2t) * d * \frac{2}{3} (h - 2t).$$

$$M = p [b * t * (h - t) + \frac{1}{6} (h - 2t)^2 * d].$$

Het weerstandsmoment W van de ligger : $W = \frac{M}{p} = b * t * (h - t) + \frac{1}{6} (h - 2t)^2 * d.$

Dit weerstandsmoment is iets te groot ten gevolge van de benadering.

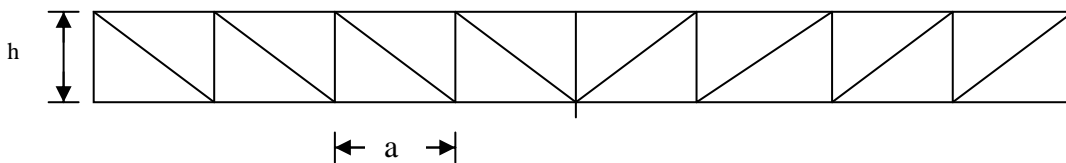
Door de dwarskracht ontstaat een schuifspanning in de doorsnede van de ligger.

De gemiddelde schuifspanning is $t = \frac{D}{F}$

D = de dwarskracht

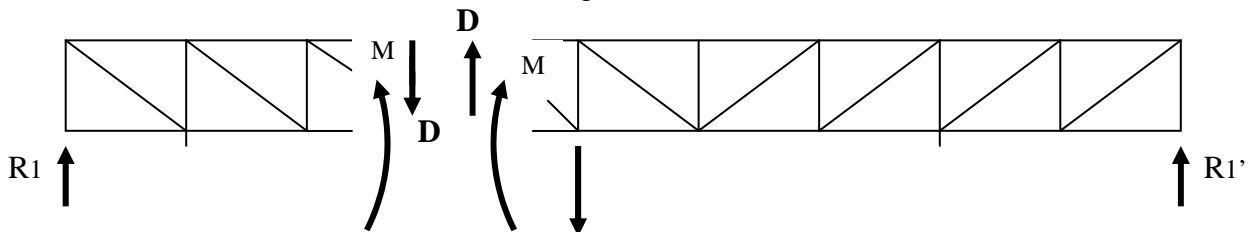
F = oppervlak van de doorsnede

Vakwerkligger



Door de doorbuiging ontstaat een drukkracht in de bovenrand en een trekkracht in de onderrand.

Door de dwarskracht ontstaan krachten in de diagonalen en hierdoor ook krachten in de randstaven.



Snede methode

Snede in midden van veld

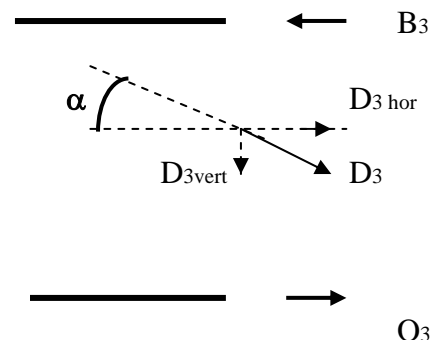
Bijvoorbeeld 3^e veld van links (blz. 3).

Dwarskracht D in snede

$$D = R_1$$

Hieruit te bepalen de diagonaal kracht D₃.

$$D_3 = \frac{D_{3\text{vert}}}{\sin \alpha} = \frac{R_1}{\sin \alpha}$$



Horizontaal evenwicht $B_3 - D_{3 \text{ hor}} - O_3 = 0$ (B_3 = drukkracht, D_3 en O_3 zijn trekkrachten).

$$D_{3 \text{ hor}} = D_{3 \text{ vert}} \cotg \alpha = R_1 \cotg \alpha$$

$$B_3 = + D_{3 \text{ hor}} + O_3$$

Moment M in snede

$$M = B_3 * \frac{1}{2}h + O_3 * \frac{1}{2}h = D_{3 \text{ hor}} * \frac{1}{2}h + O_3 * h$$

Moment $M = R_1 * 2 * \frac{1}{2} a$

$$D_{3 \text{ hor}} = R_1 \frac{\cos a}{\sin a} = R_1 * \frac{a}{h}$$

Ingevuld : $R_1 * 2 * \frac{1}{2} a = R_1 * \frac{1}{2} a + O_3 * h$

$$O_3 = R_1 * \frac{2a}{h}$$

$$B_3 = R_1 * \frac{a}{h} + R_1 * \frac{2a}{h} = R_1 * \frac{3a}{h} .$$

De snede methode wordt gebruikt als controle op de reken methode als gegeven op bl. 3 e.v. respectievelijk wanneer het krachtenspel in een veld van het vakwerk bepaald moet worden.